О бесконечности: экскурс в прошлое.

Аминов Л. К.

Аннотация.

В истории математики известны две концепции бесконечности – Аристотелева и Канторова. Последняя была сформулирована создателем теории множеств Кантором примерно полтора века назад и в настоящее время является преобладающей. При формулировании концепции Кантор использовал **диагональный метод** сравнения мощностей множеств бесконечных рядов и множества натуральных чисел, а также **теорему Кантора** о преобладании мощности множества всех подмножеств множества А над мощностью самого А. В предлагаемой работе показывается на конкретных примерах (т. е., ‘конструктивно’), что использованные Кантором доводы не вполне доказательны. Соответственно, более приемлемой представляется концепция единой потенциальной бесконечности.

Пройдут миллионы лет, прежде чем мы сможем понять, почему мы стремимся познать бесконечность. .
П. Эрдёш (1913 -1996).

Введение.

Математика покоится на трех китах: ***нуль, единица и бесконечность***, обозначаемых символами 0, 1 и ∞, соответственно. Их существование обычно постулируется в системах аксиом как логики, так и арифметики. Эти понятия очень емкие, тесно взаимосвязанные и выходят далеко за пределы математики. Предварительные представления о них люди получают посредством чувственных восприятий окружающего мира. Единицу можно сколь угодно укрупнять и сколь угодно дробить на части. Единица является родоначальницей натурального ряда чисел, возникающего в процессе последовательного складывания единицы с собой, а понятие ***математической бесконечности*** используется для обозначения ***потенциального*** (*виртуального*) ***результата***, «получающегося» при неограниченном продолжении процесса. Цифр 0 и 1 достаточно для написания любых натуральных чисел в двоичном счислении:

$$a = a_0 2^0 + a_1 2^1 + \ldots + a_i 2^i + \ldots \equiv a_0 a_1 \ldots a_i \ldots \,, \tag{1}$$

а также конечных и бесконечных двоичных дробей:

$$0.a \equiv 0.a_0 a_1 \ldots a_i \ldots = a_0 \left(\tfrac{1}{2}\right)^1 + a_1 \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \ldots + a_i \left(\tfrac{1}{2}\right)^{i+1} + \ldots, \tag{2}$$

где каждый элемент последовательности $a_0a_1\ldots a_i\ldots$ может принимать значения 0 или 1. Для конечных натуральных чисел a ряд (1) обрывается при некотором конечном n (разряд числа a), т. е., $a_n = 1$, $a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = 0$. При этом обычно a ‘читается’ так: $a = 1a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_0$. Соответствующая ‘конечная’ дробь может быть отождествлена с ‘настоящей’ бесконечной дробью по правилу:

$$0.a_0a_1 \ldots a_{n-1}1000 \ldots \equiv 0.a_0a_1 \ldots a_{n-1}0111 \ldots \tag{3}$$

Каждую дробь *можно* геометрически рассматривать как точку отрезка [0, 1], и множество этих дробей в современном понимании обладает мощностью континуума c. Отметим еще, что множество бесконечных последовательностей $a \equiv a_0a_1\ldots a_i\ldots$ можно символически представить в виде V^∞, где $V = \{0, 1\}$ – двухэлементное множество.

Понятие *бесконечность*, широко распространенное и вне математики, вызывало и вызывает дискуссии и в ученой среде, и среди широкой публики. В науке со времен Аристотеля считалось, что «бесконечность всегда в возможности, а не в действительности». К. Гаусс писал в 1831 г.: «Я против употребления бесконечной величины как чего-то завершенного, что в математике недопустимо». Эта традиция была нарушена создателем теории множеств Г. Кантором, который ввел (можно сказать, вернул) в обиход понятие завершенной, «актуальной» бесконечности в противоположность Аристотелевой «потенциальной бесконечности». Кантор обобщил понятие ***числа элементов*** на бесконечные множества, используя термин ***мощность*** (или ***кардинальное число***) множества и символ $\aleph$ (***алеф***) для обозначения мощностей бесконечных множеств. Согласно Кантору*, **существуют*** (в том же смысле, что и обычные сколь угодно большие числа) бесконечные множества, обладающие различными кардинальными числами. Последовательность кардинальных чисел бесконечных множеств в порядке их возрастания имеет вид:

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 \ldots \qquad (4)$$

где минимальное кардинальное число $\aleph_0$ является мощностью натурального ряда **N**. В ряду алефов должна содержаться и мощность континуума *c*, которая, как *показал* Кантор, больше $\aleph_0$. Предположение о том, что $c = \aleph_1$, называется ***континуум-гипотезой***.

Столь радикальное вторжение в основы математики встретило весьма неоднозначные отклики виднейших ученых конца XIX-го - начала XX-го веков. Был отмечен ряд противоречий (парадоксов) ***канторовской теории множеств***, преодоление которых виделось в усовершенствовании логики математических рассуждений. Результатом усилий в этом направлении явилось создание и развитие ***математической логики***. Целью этой отрасли математики предполагалась полная формализация процессов вывода и доказательства правильных утверждений – теорем (***программа Гильберта***), что позволило бы избегать ошибок и противоречий. Существенные ограничения на выполнимость этой программы наложили известные ***теоремы Геделя*** о неполноте и непротиворечивости различных систем аксиом. Эти теоремы являются стимулом к пересмотру некоторых не вполне прозрачных положений теории множеств, таких, например, как система алефов (4), о которой Г. Вейль выразился как о «тумане на тумане».

Одним из центральных положений теории кардинальных чисел (алефов) является упомянутое выше соотношение $c > \aleph_0$. В настоящей работе мы приводим соображения, свидетельствующие о недостаточной доказанности этого соотношения и о возможности отказа от него. По сути, это является возвратом от ***канторовской концепции*** бесконечности к ***Аристотелевой***, или, скорее, стиранием грани между ними.

Определенным доводом в пользу ***единой*** бесконечности служит само ***канторовское*** *определение* множества как «объединения в одно целое объектов [элементов], ***хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью***». Совокупность «хорошо различимых» объектов в принципе, по-видимому, можно поэлементно перебрать и перенумеровать, т. е., она ***нумеруема*** – является конечным или счетным множеством. Или, немного по-другому, для любых двух бесконечных канторовских (***нумеруемых***) множеств можно затеять ***потенциально бесконечный*** процесс составления пар элементов, в результате которого осуществляется ***взаимно однозначное*** соответствие этих множеств друг с другом.

Не всякие совокупности объектов удовлетворяют канторовскому определению множеств. Например, с момента создания квантовой механики в научный обиход вошли ***некантовские*** множества одинаковых частиц, подчиняющихся квантово-механическому ***принципу неразличимости***. Конечно, эта неразличимость не означает, что у них нет количественных характеристик. Кроме того, в квантовой теории явно вводится понятие ***Наблюдателя***, регулирующего процессы измерения физических наблюдаемых, что в известной мере перекликается с включением в ***определение*** множества человеческой ***интуиции и мысли***.

Кажущаяся парадоксальность одинаковой (потенциальной) мощности континуума и множества натуральных чисел, не в последнюю очередь, связана с геометрическим представлением их в виде, соответственно, отрезка числовой оси и изолированных точек на этой оси. Но если выполнить над отрезком следующую ***потенциально бесконечную*** процедуру: выбросить сначала среднюю треть исходного отрезка, затем средние трети двух оставшихся на графике частей исходного отрезка и т. д., то в «результате» получится так называемое триадическое множество Кантора («канторова пыль»), **по внешнему виду** напоминающее бесконечное множество точек, но обладающее мощностью континуума.

В первой части работы рассматриваются формальные стороны некоторой простой «универсальной» бесконечной таблицы (УТ), отдельные фрагменты которой являются таблицами истинностных функций произвольного конечного числа аргументов. Такие таблицы составляют содержание вводного раздела математической логики – исчисления высказываний. УТ позволяет естественным (*на наш взгляд*) образом установить соответствие между натуральным рядом и множеством двоичных дробей (2), которое ***потенциально*** представляется взаимно однозначным. Во второй части обсуждаются некоторые другие следствия возврата к Аристотелевой точке зрения, в частности, установление определенной симметрии между свойствами нуля и бесконечности.

1. Истинностные таблицы в исчислении высказываний.

Формально, упомянутую бесконечную таблицу УТ можно строить, не обращаясь к логической терминологии (таблица 1). Выпишем в качестве заголовков (номеров) столбцов таблицы подряд натуральные числа. В столбец с номером a запишем цифры a_i (0 или 1), используемые в двоичном представлении (1) числа a.

Таблица 1. Натуральные числа в двоичной записи.

	0	**1**	**2**	**3**	**…**	***a***	**…**
0	0	1	0	1	…	a_0	…
1	0	0	1	1	…	a_1	…
2	0	0	0	0	…	a_2	…
…	…	…	…	…	…	…	…
i	0	0	0	0	…	a_i	…
…	…	…	…	…	…	…	…

С набором цифр (a_0, a_1, …, a_i, …) связано не только натуральное число a (1), но и двоичная дробь $0.a$ (2), представленная в виде бесконечного сходящегося ряда, последовательные частичные суммы которого образуют ***последовательность Коши***. Столбцы a, как числа, расположены в порядке возрастания слева направо, тогда как соответствующий порядок дробей $0.a$ по их величине представляется на первый взгляд хаотичным. Множество ***всех*** дробей вида (2) охватывает (потенциально) ***все*** числа (точки) отрезка [0,1] числовой оси, и мы (*предварительно*) заключаем, что множества натуральных чисел и действительных чисел отрезка [0,1] ***равномощны***. Такое заключение, естественно, требует более детального обсуждения, чем мы займемся в следующем разделе.

Интересным свойством таблицы является периодичность ее строчек. Нулевая строчка периодична с периодом два: 0101… ≡ $(01)^\infty$, первая – с периодом 4: 00110011… ≡ $(0^2 1^2)^\infty$, i-я – с периодом 2^{i+1}: $\left(0^{2^i} 1^{2^i}\right)^\infty$. Поэтому, если ограничиться первыми i

строчками УТ, вся остающаяся структура будет периодична как раз с указанным последним периодом, т.е., она будет полностью определяться конечной таблицей, содержащей $i + 1$ строчку и 2^{i+1} столбец. Этот фрагмент универсальной таблицы 1 обозначим посредством УТ(i). Множество столбцов УТ(i), очевидно, совпадает с множеством V^{i+1}. Указанная периодичность означает, что в таблице имеется (*существует*) бесконечно много последовательностей Коши с одинаковыми элементами (частичными суммами) до любого порядка, т. е., сколь угодно мало отличающихся друг от друга.

Отметим, что УТ(i) могут служить таблицами истинностных функций произвольного числа аргументов («букв») в исчислении высказываний.

Высказывание – это утверждение, которое можно квалифицировать как «истину», И, либо как «ложь», Л. По-другому, это величина А, принимающая два значения, 0 (И) или 1 (Л). С помощью различных *связок* из простых высказываний («букв») образуются более сложные, об истинности или ложности которых можно судить, исходя из типа связки и истинности или ложности связываемых выражений. Произвольное высказывание А можно рассматривать как функцию ***простых*** высказываний $P_1, P_2, \ldots, P_n$, независимо друг от друга принимающих значения И, Л (0, 1), $A = f(P_1, P_2, \ldots, P_n)$. При заданных значениях букв $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ($p_i = 0$ или 1) функция принимает значение $f(p_1, \ldots, p_n)$, также равное 0 или 1. При конечном числе букв n, число различных наборов аргументов функции f равно 2^n, а общее число различных функций равно 2^{2^n}. По существу, эти функции представляют собой отображение $V^n \to V$, где V – двухэлементное множество {И, Л}, или {0, 1}. Значения функций можно представить в виде таблицы, содержащей 2^n строчек и 2^{2^n} столбцов. При $n = 2$ − это таблица из 4-х строк и 16 столбцов:

Таблица 2. Всевозможные логические функции двух аргументов.

P_2	P_1	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
		0	$\mid$	$\Rightarrow$	$\neg P_2$	$\Rightarrow$	$\neg P_1$	$\Leftrightarrow$	$\downarrow$	$\vee$	$\oplus$	P_1		P_2		&	**1**

Таблица организована следующим образом. Строчки нумеруются парами $i_1 i_2$, рассматриваемыми как двоичная запись натуральных чисел i от 0 до 3: $i = (i_1 i_2) = i_1 2^1 + i_2 2^0$. Каждой функции соответствует столбец из четверки нулей и единиц $a_0 a_1 a_2 a_3$, соответствующей натуральному числу $a = a_0 2^0 + a_1 2^1 + a_2 2^2 + a_3 2^3$, которое используется в качестве номера функции. Таким образом, в строчке i и столбце a таблицы стоит двоичная цифра a_i равная 0 или 1. Как видно, таблица 2 представляет собой фрагмент таблицы 1, УТ(3), составленный из ее первых четырех строчек и шестнадцати столбцов.

Некоторые из функций в логике имеют специальные названия и обозначения, указанные в нижнем ряду таблицы. Например, $f_{14}(P_1, P_2) = P_1 \& P_2$ – *конъюнкция* высказываний P_1 и P_2; она истинна только тогда, когда истинны оба связываемых знаком конъюнкции высказывания. $f_8(P_1, P_2) = P_1 \vee P_2$ – *дизъюнкция*, $f_2(P_1, P_2) = P_2 \Rightarrow P_1$, $f_4(P_1, P_2) = P_1 \Rightarrow P_2$ – *импликация* (следование), $f_3(P_1, P_2) = \neg P_2$ – отрицание P_2 и т.д. Отметим еще, что множество столбцов приведенной таблицы замкнуто относительно операций поэлементного умножения и сложения по модулю 2, что позволяет заменять логические операции алгебраическими. Не будем подробно останавливаться на этих вопросах, поскольку для наших целей существенна лишь формальная структура таблиц.

При большем, чем 2, числе букв полные таблицы истинностных функций становятся необозримыми, но принципы их составления и структура сохраняются. При произвольном n число различных функций (столбцов таблицы) равно 2^{2^n}, длина столбцов (число строк) равна 2^n, т.е., мы имеем дело с фрагментом УТ(2^n-1) таблицы 1. В качестве букв выступают квазипериодические столбцы: $P_1 = (010101\ldots01) \equiv (01)^{2^{n-1}}$, $P_2 = (00110011\ldots0011) \equiv (0^2 1^2)^{2^{n-2}}$, $P_3 = (00001111\ldots00001111) \equiv (0^{2^2} 1^{2^2})^{2^{n-3}}$,…, $P_n = (00\ldots011\ldots1) \equiv (0^{2^{n-1}} 1^{2^{n-1}})^{2^0}$ (2^{n-1} нулей и столько же единиц). Функция f_a характеризуется столбцом ($a_0, a_1, \ldots a_i, \ldots, a_{2^n-1}$), где коэффициенты a_i осуществляют представление номера функции в двоичной системе. Таким образом, значением функции $f_a(P_1, \ldots, P_n)$ в строчке $i = i_1 2^0 + \ldots + i_n 2^{n-1}$, в которой буквы $P_1, P_2, \ldots, P_n$ принимают значения $i_1, i_2, \ldots, i_n$, соответственно, является число a_i, равное 0 или 1.

Таблицы обладают высокой симметрией. Отметим, что таблица для n букв многократно содержит в себе таблицы для числа букв от 1 до n - 1. Каждая строчка – периодическая с периодом 2^{i+1}, где i – номер строчки. В первой четверке строчек периодически повторяется вышеприведенная таблица 2 для двух букв, в первых восьми – таблица 8×256 для трех букв и т.д. Каждый столбец таблицы, т.е., функция $f_a(P_1,\ldots, P_n)$ представляет собой некоторую *характеристическую* функцию на множестве V^n.

Вспомним, что столбец $a = (a_0 a_1 \ldots a_{2^n-1})$ изображает не только натуральное число a, но и правильную двоичную дробь

$$0.a = a_0\left(\frac{1}{2}\right)^1 + a_1\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + a_i\left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} + \ldots + a_{2^n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}, \tag{5}$$

т. е., набор столбцов УТ(2^n-1) – это ***все*** дроби со знаменателем 2^{2^n} и произвольными числителями от 0 до $2^{2^n}-1$. При неограниченном росте n соответствующая таблица сводится к «универсальной» таблице 1 и будет включать (по Аристотелю – *потенциально*, по Кантору - *актуально*) «всё» множество двоичных дробей, но при этом каждая дробь будет иметь свой «номер» – некоторое натуральное число! Чтобы таблица 1 выглядела подходящим образом, как таблица истинностных функций, следует еще представить натуральные числа i, нумерующие строчки таблицы, в двоичной форме:

$$i = i_1 2^0 + i_2 2^1 + \ldots + i_n 2^{n-1} + \ldots, \tag{6}$$

и отнести столбик из цифр i_1 к «букве» P_1, столбик из цифр i_2 к P_2 и т. д. ***Таким образом, устанавливается отмеченное во введении соответствие между двумя множествами***, множеством двоичных дробей и множеством натуральных чисел, что ***потенциально*** (*виртуально*) означает равенство $c=\aleph_0$.

2. Некоторые следствия соотношения $c = \aleph_0$.

Обсудим возможные причины расхождения полученного выше результата $c = \aleph_0$ с общепринятым в настоящее время положением $c > \aleph_0$. Доказательство этого положения Кантор провел с помощью так называемого ***диагонального метода*** путем прямого построения двоичной дроби, не входящей в ***любую*** проиндексированную натуральным рядом последовательность таких дробей. Согласно построению Кантора применительно к таблице 1, дробь, не содержащаяся в этой таблице, должна начинаться как 0.1…, чтобы отличаться от нулевого столбца; как 0.11…, чтобы отличаться и от первого столбца; как 0.111…, чтобы отличаться от второго столбца и т. д. То есть, речь идет о периодической дроби 0.(1) = 0.(11) = …, которая располагается в таблице 1 ***неопределенно*** (бесконечно) ***далеко*** от начала и которая по правилу (3) ***отождествляется с натуральным числом*** **1**. Таким образом, ***при выбранном способе***

нумерации двоичных дробей диагональный метод Кантора срабатывает ***вхолостую:*** вместо непронумерованной дроби он приводит к целому числу 1. «Номер» соответствующего столбца – *потенциально* наибольшее натуральное число 111…1…– символически может быть обозначен как (1) = (11) = … (в десятичном счислении 999…9… = (9)). Можно было бы в нынешней (*канторовской*) иерархии бесконечностей отождествить этот существующий лишь «потенциально» номер с трансфинитным числом ω – наименьшим из бесконечных *ординалов*.

В двоичной системе неопределенно далеко от начала таблицы располагаются также несократимые дроби вида p/q, знаменатели которых содержат в качестве делителей, кроме возможных двоек, и другие простые числа. Им отвечают периодические или смешанные периодические двоичные дроби вида $0.a(b)$, где a, b – конечные натуральные числа. Номера этих дробей $a(b)$ при $b \neq 0$ являются уже бесконечными числами. Таким образом, бесконечность в этой ситуации проявляется как результат ***соглашения*** об использовании позиционных систем исчисления.

Далее заметим, что каждому столбцу таблицы 1 можно поставить во взаимно однозначное соответствие не только его номер $a \equiv a_0a_1a_2\ldots a_i\ldots$ или соответствующую двоичную дробь $0.a$ (см. формулы (1), (2)), но и некоторое подмножество натурального ряда $\{i_1(a), i_2(a), \ldots\}$, в котором в качестве i_k фигурируют номера равных 1 элементов последовательности $a_0a_1a_2\ldots a_i\ldots$. Например, 11-му столбцу таблицы соответствуют его двоичный номер 1101, дробь 0.1101, а также подмножество {0, 1, 3} натурального ряда. Таким образом, путем прямого построения, устанавливается взаимно однозначное соответствие между тремя типами множеств: бесконечной последовательностью (натуральным рядом), множеством всех двоичных (ясно, что и всех n-ичных) дробей и множеством всевозможных подмножеств натурального ряда. Сразу отмечаем, что установленное так соответствие между натуральным рядом и множеством всевозможных его подмножеств противоречит известной ***теореме Кантора,*** которая по сути является переформулировкой его же ***диагонального метода*** и потому так же может быть поставлена под сомнение.

Число элементов (мощность) множества всех подмножеств конечного множества порядка n равно 2^n. ***Естественно*** обозначить мощность всех подмножеств натурального ряда чисел как $2^{\aleph_0}$. Согласно Кантору, $2^{\aleph_0} = c$. Вместе с неравенством $c > \aleph_0$ это приводит к цепочке кардинальных чисел:

$$\aleph_0 < c < 2^c < \ldots, \tag{7}$$

несколько более содержательной, чем «туманная» цепочка алефов (3), частью которой она является. Предположение о том, что эти две цепочки совпадают, называется ***обобщенной континуум-гипотезой***. Утверждение $c = \aleph_0$ сводит ***все*** бесконечные кардинальные числа к одному – некоторому условному обозначению Аристотелевой ***потенциальной бесконечности*** (которым в явочном порядке и служит символ ∞). Однако, как отмечалось выше, уверенно применять это утверждение можно лишь по отношению к ***канторовским*** множествам с ***различимыми*** элементами, каковым, по-видимому, и не является “весь” континуум (но являются ***всюду плотное*** множество рациональных дробей, множество алгебраических чисел).

Различные монотонно возрастающие с ростом аргумента функции типа n^2, 2^n, $n!$, $\lg n$ различаются «скоростью ***вечного*** движения» по направлению к бесконечности. Это позволяет говорить о бесконечно больших (может, лучше говорить о ***сколь угодно больших***, СУБ) типа $O(n^2)$, $O(2^n)$, $O(\lg n)$. Сопоставление последовательностей (n), (n^2) и (2^n) свидетельствует в пользу равенства их мощностей, тогда как при канторовском подходе экспоненциальная функция определенным образом выделяется.

Аналогично, с бесконечным дроблением ***единицы*** связаны бесконечно малые (СУМ) типа o(1/ n^2), o(1/2^n), o(1/n!) и т.д. Тем самым устанавливается определенная симметрия между нулем и бесконечностью; бесконечность – нечто недостижимое, нуль – нечто исчезающее, ничто. Там, где ***ничто***, потенциально может возникнуть что-то. ***Нуль, как результат бесконечного дробления единицы, столь же недостижим как и бесконечность***. Такой вывод является платой (или бонусом) за возвращение к Аристотелевой концепции бесконечности.

Понятие «единица» в науке прежде всего используется как единица измерения. Единицы измерения в стандартной системе близки к параметрам человека – килограмм, метр, секунда. В других системах единицы могут отличаться от стандартных во многие миллионы раз. В качестве единиц измерения углов используются градусы и радианы, причем 180 градусов равны π радианам. Таким образом, единица в принципе может считаться ***представителем*** произвольного конечного вещественного числа (элемента, зримого предмета, "хорошо мысленно представимого" объекта). Нуль, единица и возникающие в процессе бесконечного ***следования*** за ними числа составляют натуральный ряд, «созданный богом» по выражению Л.Кронекера.

Заключение.

Во введении отмечалось, что внедрение в математику в качестве ее основы теории множеств сопровождалось оживленными дискуссиями. Восторженные отклики Д. Гильберта и Б. Рассела перемежались с критическими высказываниями Г. Вейля и А. Пуанкаре. Пуанкаре, например, эмоционально писал в 1908 г., что «будущие поколения будут считать эту теорию болезнью, от которой мы излечились». Тот факт, что теория множеств вместе с канторовским представлением о бесконечности заняли в математике прочное место, можно сопроводить замечанием Дж. фон Неймана: «В математике не усваивают понятий, а постепенно к ним привыкают». Или, по мысли М. Планка в связи с квантовой теорией, «научные идеи торжествуют по мере вымирания их противников». Естественно, однако, по мере развития науки возвращаться к узловым, дискуссионным моментам ее истории. Невыполнимость программы Гильберта оживила интерес к теории бесконечности.

Математика, как писал А. Эйнштейн (1921), «обязана своим происхождением необходимости узнать что-либо о поведении реально существующих объектов». «Если теоремы математики прилагаются к отражению реального мира, они не точны; они точны до тех пор, пока не ссылаются на действительность». Действительно, уже сам процесс выделения объектов изучения из окружающей среды каким-то образом сказывается на их характеристиках и вместе с не идеальностью измерительных приборов ограничивает точность результатов измерений. Точность измерений всегда конечна. Рост точности '*дополняется*' ростом сложности приборов. Поэтому, с точки зрения возможных приложений в естествознании, бесконечность, бесконечная точность достижимы лишь мысленно. Существование различных ступеней бесконечности, фактически постулированное в трудах Кантора, по ряду пунктов, рассмотренных в настоящей работе, выглядит недостаточно обоснованным. При этом возникают и вопросы, связанные с выбором систем аксиом.

В повседневной (*прикладной*) работе не приходится сталкиваться с необходимостью структурировать бесконечность по мощности. Натуральный ряд достаточно велик, чтобы можно было любое сколь угодно большое конечное число считать лишь началом этого ряда. Его достаточно для оцифровки всей науки настоящего и будущего.

По мере решения конкретных задач, которые можно рассматривать как этапы строительства здания математики, нужно следить за фундаментом здания – логикой, включая теорию множеств. Эмоциональный фон, в котором оказывается исследовательстроитель вследствие такой дополнительной нагрузки, хорошо описывается следующей цитатой из очерка Г. Вейля «Математика и логика» (1946):

«Из этого исторического очерка совершенно ясно одно: мы все менее верим в наличие достаточных оснований логики и математики. Как и все в современном мире, мы имеем свой собственный «кризис». И длится он у нас уже около полусотни лет. ***Извне вряд ли заметно, что он препятствует нашей повседневной работе***; однако я, например, должен признаться, что он оставил глубокий след на всем моем математическом творчестве: он вынуждал меня направлять научные интересы в области, считающиеся сравнительно «безопасными», он постоянно охлаждал энтузиазм и решительность, с которыми я принимался за свои научные изыскания. Вероятно, такому опыту причастны и другие математики, которым не безразлично, что означают их усилия в развитии науки в плане всего человеческого существования, исполненного тревог и познания, страданий и творчества».

Литература.

1. М.Клайн. Математика. Утрата определенности. «Мир», М. 1984, 447 с.
2. А.В.Архангельский. Канторовская теория множеств. Изд. Моск. универс. 1988, 112 с.
3. R.R.Stoll. Set Theory and Logic. Dover Publ. N.Y. 1979, 474 p.
4. P.Suppes. Axiomatic Set Theory. Dover Publ. N.Y. 1972, 268 p.
5. Энциклопедия элем. матем., кн.1, Арифметика. Гостехиздат, М. Л. 1951, 448с.
6. Д.Гильберт, П.Бернайс. Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики., Наука (Физ.-мат. лит.), М. 1979, 560с.
7. Э.Мендельсон. Введение в математическую логику. Наука, Физмат, М. 1976, 320 с.
8. M.Kac, S.Ulam. Mathematics and Logic, Dover Publ. N.Y. 1992, 170 p.